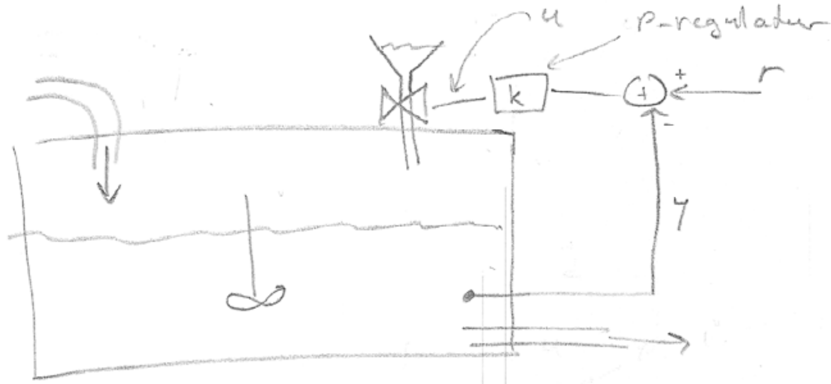
6.9 Reglerteknik övning 1 LV4 20/4-10



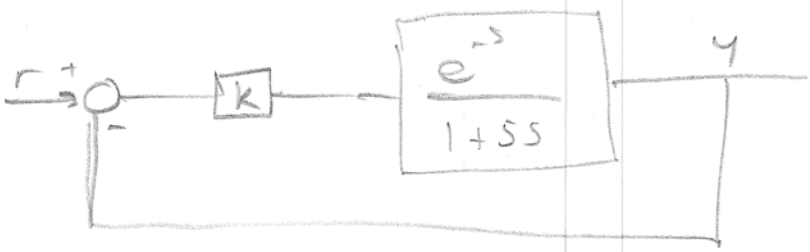
Överföringsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{1+5s}$$

Givaren antas vara ideal.

Hur stor förstärkning k kan tillåtas innan systemet blir instabilt?

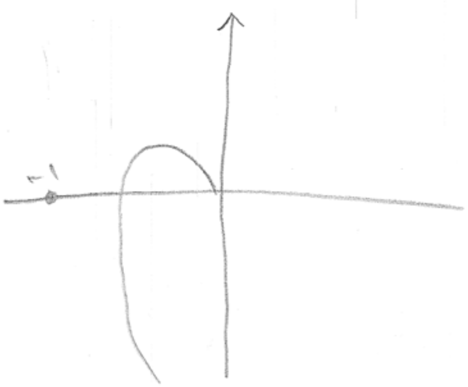
Rita blockschema



Kretsöverföringen blir

$$L(s) = \frac{k e^{-s}}{1+5s}$$

Inga poler i HHP ⟹ Nyquist förenklade kriterium kan användas.



Det återkopplade systemet är stabilt så länge Nyquist-kurvan skär den negativa realaxeln till höger om punkten -1

Dvs när

$$\begin{cases} |L(j\omega_\pi)| < 1 \\ \underline{/L(j\omega_\pi)} = -\pi \end{cases}$$

$$|L(j\omega_\pi)| = \frac{|ke^{-j\omega_\pi}|}{|1+5j\omega_\pi|} = \frac{k}{\sqrt{1+25\omega_\pi^2}} < 1$$

$$\Rightarrow k^2 < 1 + 25\omega_\pi^2 \qquad (1)$$

$$\underline{/L(j\omega_\pi)} = -\omega_\pi - \text{atan}(5\omega_\pi) = -\pi \qquad (2)$$

Ej lösbart analytiskt. Lös iterativt i räknare

$\Rightarrow \omega_\pi \approx 1{,}69$ rad/s

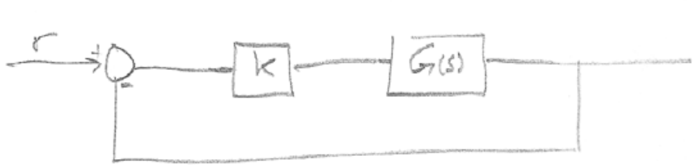
Sätt in (1) $\Rightarrow$ $k^2 < 1 + 25 \cdot 1{,}69^2$

$k < 8{,}5$

Dvs en förstärkning på upp till 8,5 kan tillåtas innan systemet blir instabilt.

Då systemet innehåller en dödtidsterm, e^{-s}, kan varken Routh's metod eller polbestämning användas.

6.12



$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+1)(s+6)}$$

– Undersök för vilka k, det återkopplade systemet är stabilt.

Kretsöverföringen blir $L(s) = \dfrac{k(s+1)}{s(s+1)(s+6)}$

Polerna för $L(s)$:

$s_1 = 0$

$s_2 = +1 \Rightarrow$ pol i HHP $\Rightarrow$ förenklade Nyquistkriteriet ej applicerbart.

$s_3 = -6$

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+6)}$$

För stabilitet gäller, enl. fullständiga Nyquistkriteriet

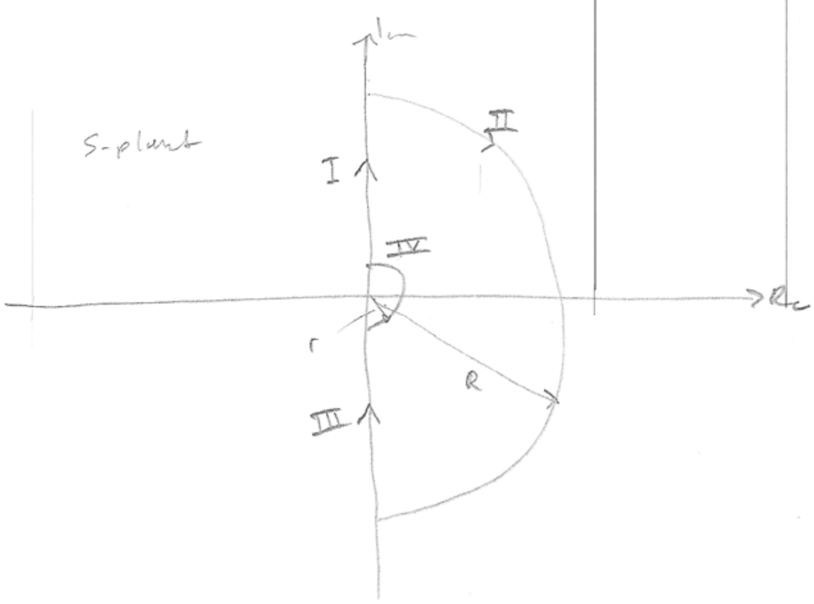
$Z = P + N = 0$

Z: Nollställen för $1 + L(s)$ dvs polerna i hhp för det återkopplade systemet.

P: poler i hhp för $L(s)$, här $P = 1$

N: Antalet varv runt punkten -1 räknat medurs när Nyquistkonturen genomlöps.

Nyquists kontur:



I: $s = j\omega$, ω går från 0 till ∞

II: $s = Re^{j\theta}$, $R \to \infty$ och θ går från $\frac{\pi}{2}$ till $-\frac{\pi}{2}$ (medurs)

III: $s = j\omega$, ω går $-\infty$ till 0

IV: $s = re^{j\theta}$ $r \to 0$ och θ går från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$ (moturs)

Område I och III. (Betrakta $k=1$)

$$L(j\omega) = \frac{(j\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)(j\omega+6)} = \frac{1+j\omega}{j\omega(j^2\omega^2+6j\omega-j\omega-6)} = \frac{1+j\omega}{j\omega(-6-\omega^2+5j\omega)} =$$

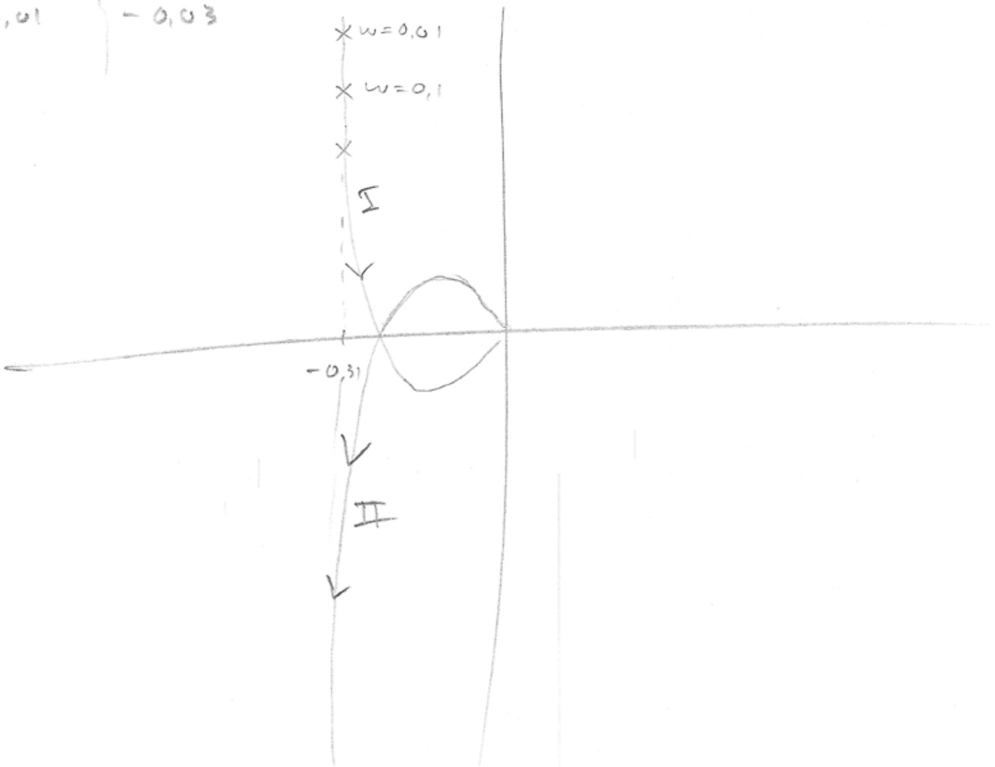
$$= \frac{1+j\omega}{-5\omega^2-j(6\omega+\omega^3)} \cdot \frac{(-5\omega^2+j(6\omega+\omega^3))}{(-5\omega^2+j(6\omega+\omega^3))} = \ldots =$$

$$= -\frac{(11+\omega^2)}{(1+\omega^2)(36+\omega^2)} + j\,\frac{6-4\omega^2}{\omega(1+\omega^2)(36+\omega^2)} \qquad (*)$$

Ställ upp tabell för I

ω	Re	Im
0,001	−0,31	167
0,01	−0,31	16,7
0,1	−0,30	1,67
1	−0,16	0,03
5	−0,02	−0,01
10	−0,01	−0,03

Område III ges av spegling av område I i Re-axeln.



$II \rightarrow s = Re^{j\theta} \quad R \to \infty$

$$\Rightarrow L(s = Re^{j\theta}) = \frac{Re^{j\theta} + 1}{R^3 e^{j\theta} + 5R^2 e^{j\theta} - 6Re^{j\theta}} \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

dvs II avbildas i origo

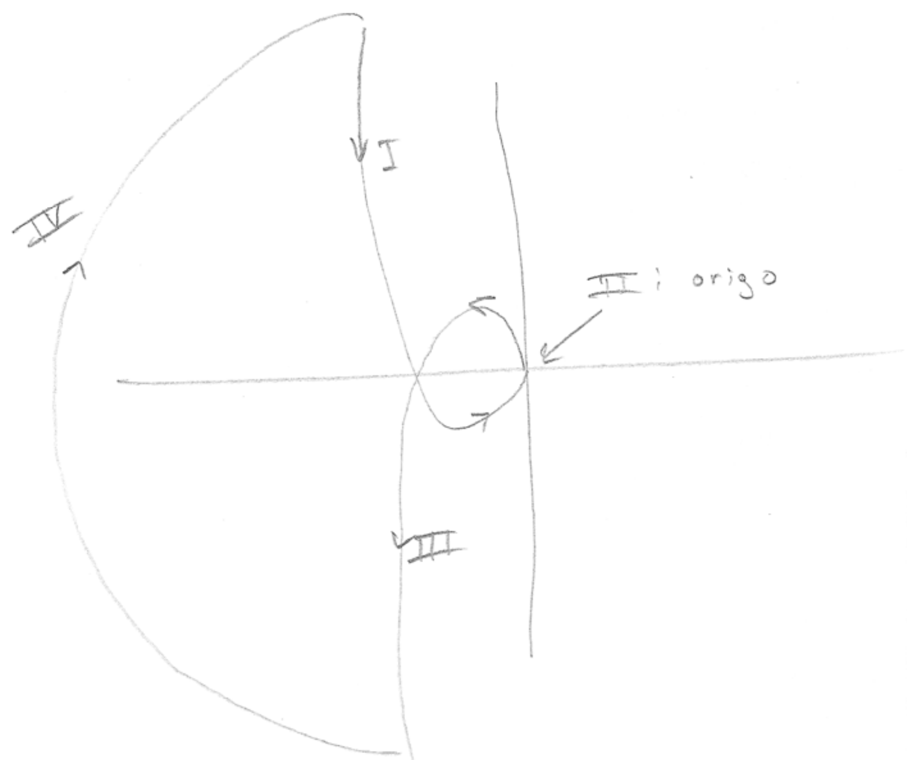
$IV \rightarrow s = re^{j\theta} \quad r \to 0$

$$\Rightarrow L(re^{j\theta}) = \frac{re^{j\theta} + 1}{r^3 e^{j\theta 3} + 5r^2 e^{j\theta 2} - 6re^{j\theta}} \underset{\text{då } r \to 0}{\approx} \frac{1}{-6re^{j\theta}} =$$

$$= -\frac{e^{-j\theta}}{6r} = \frac{-\cos(-\theta) - j\sin(-\theta)}{6r} = \frac{-\cos(\theta) + j\sin(\theta)}{6r}$$

Då $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ så är $\cos(\theta) > 0$

och $\sin(\theta)$ går från -1 till 1



För $k = 1$ omslingras $(-1,0)$ en gång medurs

$\Rightarrow N = 1$

$Z = P + N = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Dvs det återkopplade systemet är ej stabilt.

För att det återkopplade systemet ska vara stabilt krävs att skärningen med negativa Re-axeln sker till vänster om $(-1,0)$. Dvs omslingringen sker moturs och $N = -1$

$$(*) \Rightarrow L(j\omega) = K\left(\frac{-(11+\omega^2)}{(1+\omega^2)(36+\omega^2)} + j\,\frac{(6-4\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(36+\omega^2)}\right)$$

Skärningen med Re-axeln sker där j-termen är noll

dvs $6 - 4\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_\pi = \sqrt{6/4} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ rad/s

Vid denna frekvens skall Re-delen vara mindre än -1 för att erhålla omslingring moturs.

$$-1 > \frac{K(11 - \omega_\pi^2)}{(1+\omega_\pi^2)(36+\omega_\pi^2)}$$

För att erhålla ett stabilt återkopplat system.

$$\frac{K(11 + 3/2)}{(1 + 3/2)(36 + 3/2)} > 1 \Longrightarrow K > \frac{15}{2} = 7{,}5$$

Jäm för med Rouths metod för att erhålla villkor på k.

$1 + L(s) = 0$

$$\Rightarrow 1 + \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s-6)} = 0 \Rightarrow s(s-1)(s+6) + k(s+1) = 0$$

$$s^3 + 5s^2 - 6s + ks + k = 0$$
$$s^3 + 5s^2 + (k-6)s + k = 0$$

Ställ upp tabell

s^3	1	$k-6$
s^2	5	k
s^1	c_1	0
s^0	d_1	0

$$\Rightarrow c_1 = \frac{5(k-6) - k \cdot 1}{5}$$

$$c_1 = \frac{4k-30}{5}$$

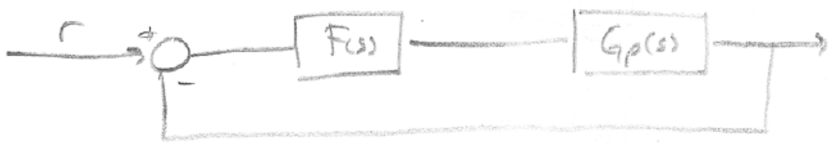
$$d_0 = \frac{c_1 k - 0{,}5}{c_1} = k$$

alla termer > 0 för stabilitet

Villkoren: $k > 0$

$$\frac{4k-30}{5} > 0 \Rightarrow k > \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

6.16



$$G_p(s) = 200\,e^{-10s}$$

$$F(s) = \frac{k_i}{s}$$

önskas: $\varphi_m \geq 40^\circ$

$A_m \geq 2{,}5$

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) \qquad |L(j\omega_c)| = 1$$

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \qquad \angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

Kretsöverföringen:

$$L(s) = \frac{k_i \cdot 200 e^{-10s}}{s}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{k_i \cdot 200}{\omega}$$

$$\angle L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 10\omega \quad \text{(rad)}$$

Krav I

$\varphi_m > 40^\circ \Rightarrow 180^\circ + \angle L(j\omega_c) > 40^\circ$

$\Rightarrow \angle L(j\omega_c) > -140^\circ$

$$-\frac{\pi}{2} - 10\omega_c > 140 \cdot \frac{\pi}{180} \Rightarrow \omega_c < \frac{5\pi}{180}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 = \frac{200k_i}{\omega_c} \Rightarrow \omega_c = 200k_i \Rightarrow k_i = \frac{\omega_c}{200} \Rightarrow k_i < \frac{\pi}{7200}$$

Fortsätt därefter på krav 2.